

МАЙ / ИЮНЬ

ISSN 0130-2221

2015 • № 3

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



## А что это холод на землю упал...

А. СТАСЕНКО

*...все крепче мороз! Лютый пронизывающий холод! Если бы святой Дунстен вместо раскаленных щипцов схватил сатану за нос этаким морозцем, вот тот взвыл бы от такого основательного щипка!*

Ч. Диккенс. Рождественская песнь в прозе

КАК-ТО ВЕЧЕРОМ ОДИН СПОСОБНЫЙ СТУДЕНТ НА –

смотрелся телеужасов о грядущих ледниковых периодах, о том, что станет с покинутыми городами через сто, двести, ... лет, и вдруг подумал: а что если на Земле температура упадет на 200 градусов по Цельсию, т.е. достигнет 73 К? Он взглянул в Справочник физических величин и ахнул (см. таблицу): основные компоненты атмосферы - азот и кислород - могут (по крайней мере, частично) стать жидкими, поскольку их температуры кипения  $T_k$  равны 77 и 90 К соответственно. И только такие «малые» газы, как неон, водород и гелий, и не подумают конденсироваться ( $T_k$  равны 27, 20 и 4 К) вовсе.

Газ	Массовая доля	Температура кипения $T_k$ , К	
Кислород $O_2$	0,23	90	основные газы
Азот $N_2$	0,75	77	
Аргон Ar	0,013	87	«малые» газы
Углекислый газ $CO_2$	$4,6 \cdot 10^{-4}$	195	
Криптон Kr	$3,3 \cdot 10^{-6}$	120	
Ксенон Xe	$4 \cdot 10^{-7}$	165	
Сероводород $CH_4$	$8 \cdot 10^{-7}$	112	
Окись азота NO	$8 \cdot 10^{-7}$	121	
Озон $O_3$	$10^{-8} - 10^{-7}$	111	
Неон Ne	$1,2 \cdot 10^{-5}$	27	$T_k < 73\text{ К}$
Гелий He	$7,2 \cdot 10^{-7}$	4	
Водород $H_2$	$3,5 \cdot 10^{-8}$	20	

Что же произойдет с атмосферой при столь глубоком охлаждении? Очевидно, что если бы вся атмосфера Земли выпала в осадок, т.е. сконденсировалась на поверхности в виде жидкого слоя, то его толщина составила бы... ну, конечно, порядка десяти метров - ведь именно на такую высоту поднимались вода и вино в классическом демонстрационном опыте Блеза Паскаля (1623-1662) в Руане.

Однако, как свидетельствовали таблицы Справочника, даже при  $-200\text{ }^\circ\text{C}$  азот и кислород имеют все еще немалое давление своих насыщенных паров: приблизительно 440 и 80 мм рт.ст. соответственно, а значит, в сумме 520 мм рт.ст. Здесь Студент воспользовался законом Дальтона, согласно которому давление смеси газов равно сумме давлений ее компонентов.

А поскольку давления этих газов в обычной атмосфере составляют 600 и 160 мм рт.ст. (остальными «малыми» газами можно пренебречь), то это значит, что азота в «новой» атмосфере осталось  $440/600 = 0,73 = 73\%$ , а кислорода  $80/160 = 0,5 = 50\%$  от прежнего количества. Зная это, можно вычислить среднюю плотность новой атмосферы.

Приближенно ее можно оценить как

$$\rho_n = \rho_0 \left( \frac{520}{760} \right) \left( \frac{273}{73} \right) = 3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

где  $\rho_0 = 1,225 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$  - плотность привычной нам атмосферы на уровне моря. Не

удивительно ли - давление атмосферы упало, а ее плотность у поверхности даже выросла? Нет, не удивительно - это произошло из-за еще большего падения температуры (см. последний множитель).

А что же в новом океане? Плотность жидкого азота  $800 \text{ кг/м}^3$ , жидкого кислорода  $1100 \text{ кг/м}^3$ . Часть массы сжиженной атмосферы можно оценить как  $\frac{760-520}{760} = 0.3$ ; значит, вспоминая десятиметровый барометр Паскаля, можно ожидать подъема уровня океана метра на 3-4, потому что эта кислородно-азотная жидкость стечет в озера и океаны. Причем глубина нового океана (дном которого стал лед - отвердевшая вода) будет еще несколько больше - это легко оценить, учитывая, что суша на современной Земле составляет приблизительно четверть поверхности глобуса. И, взглянув на глобус, Студент оценил приблизительно площадь, занятую новым океаном, - равнины Западной Сибири, Голландии, восточных штатов Америки, дельты Амазонки... И получилось, что волны нового океана будут плескаться у ног Медного всадника.

И тут эрудированный Студент решил изобразить графически зависимость плотности от высоты над уровнем моря (рис.1). Он выбрал две температуры и воспользовался барометрической формулой

$$\rho = \rho_0 e^{\frac{mgy}{kT}} \quad (\text{здесь } m - \text{средняя масса молекулы, } k - \text{постоянная Больцмана}).$$

Студент помнил, что барометрическую формулу еще в 1686 году нашел Эдмонд Галлей (1656-1742), правда, в виде утверждения, что по мере возрастания высоты в арифметической прогрессии атмосферное давление (а в предположении постоянства температуры - и плотность) уменьшается в геометрической прогрессии. А еще он (Студент, а не Галлей) записал закон сохранения массы над каждым квадратным метром до охлаждения атмосферы и после охлаждения:

$$\int_0^{\infty} \rho_a(y, 273) dy = \int_h^{\infty} \rho_a(y, 73) dy + \rho_n h.$$

Геометрически это означает равенство площадей под кривыми, описывающими зависимость плотности вещества атмосферы от высоты в нормальном и охлажденном состояниях (см. рис.1).

Итак, на дне нового океана образуется плотный слой льда, над которым будут плескаться волны жидкого азота-кислорода. Но чтобы они плескались, нужен ветер. И над новым океаном ветер обязательно будет - ведь на полюсах холоднее, чем на экваторе, там азот и кислород могут вообще отвердеть, и оттуда будут приплывать айсберги твердой смеси  $\text{N}_2\text{-O}_2$ , постепенно тая в «теплых» широтах. А коль скоро ветер будет дуть над океанской гладью, возникнет так называемая неустойчивость поверхности (подуйте над водой в блюдце). Ветер выводит поверхность жидкости из состояния равновесия, а силы поверхностного натяжения и силы тяготения восстанавливают это равновесие. И появляются поверхностные волны.

И тут Студент крепко задумался: какова связь между скоростью  $v$  и длиной  $X$  этих поверхностных волн? С одной стороны, если волны очень мелкие (капиллярные), то основную роль должно играть поверхностное натяжение, коэффициент которого имеет размерность  $[\sigma]=H/m$ . С другой стороны, когда волны крутые (морские), существенным является тяготение, которое характеризуется ускорением свободного падения с размерностью  $[g]=m/c^2$ . Ну, разумеется, и плотность жидкости нужно учесть, а ее размерность есть  $[\rho]=kg/m^3$ .

Таким образом, можно составить две комбинации параметров для капиллярных и гравитационных волн, имеющие размерность скорости:

$$v_{\sigma}^2 = \frac{\sigma}{\rho \lambda} \quad \text{и} \quad v_g^2 = g \lambda.$$

Теоретическая гидродинамика дает следующее точное выражение:

$$v^2 = v_{\sigma}^2 + v_g^2 = \frac{\sigma}{\rho \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right)} + g \left( \frac{\lambda}{2\pi} \right).$$

Здесь длина волны не случайно разделена на  $2\pi$  - в результате получается так называемое волновое

число  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . На рисунке 2 показана качественная зависимость скорости поверхностной волны от ее длины.

Теперь нетрудно найти наименьшую скорость (кто умеет, да продифференцирует приведенное выражение и приравняет результат к нулю) и соответствующую ей длину волны.

*Рис 2. Зависимость скорости поверхностной волны от ее длины. Левее значения  $\lambda_m$ , соответствующего минимальной скорости  $v_{min}$ , — капиллярные волны, правее — гравитационные волны.*

Принимая для нового океана  $a = 0,01 \text{ Н/м}$  и  $\rho_n = 900 \text{ кг м}^3$ , получим

$$v_{\min} = \sqrt{2 \sqrt{\frac{\sigma g}{\rho_n}}} = 14,5 \text{ см/с} \text{ и } \lambda_m = 2\pi \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_n g}} = 6,6 \text{ мм}.$$

Отметим, что эту проблему более строго исследовал один из отцов-основателей Московского физтеха - академик Петр Леонидович Капица (1894-1984). Он получил, что минимальная скорость ветра, при которой возможно развитие (нарастание) волн на поверхности, приблизительно втрое больше  $a_{\min}$ . Кстати, именно он разработал в нашей стране промышленную технологию сжижения газов (даже гелия).

Конечно, для дальнейшего развития волн нужно еще силовое воздействие. Если учесть, что сила, действующая на тело, движущееся в газе, пропорциональна плотности газа и квадрату скорости тела, то при увеличении плотности в 3 раза для возбуждения таких же волн на современной Земле скорость ветра должна быть в  $\sqrt{3}$  раз меньше.

Но если длина волны становится сравнимой с глубиной /г, тут применима «теория мелкой воды», которая дает совсем простую зависимость для скорости:  $v = \sqrt{gh}$ , «не чувствующую» свойств жидкости.

И тут Студенту привиделось, что Менделеев с Клапейроном требуют провести вычисления точнее, с учетом данных справочной таблицы. Проснувшись в холодном поту (почти  $-200 \text{ }^\circ\text{C}$ ), Студент радостно вздохнул и побежал на экзамен по аэрогидротермодинамике.